

Aufgaben zur Vektorrechnung

1.0 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Vektoren.

1.1 $\vec{a} + \vec{b}$ 1.2 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 1.3 $\frac{1}{2}\vec{a} + (\vec{b} - 2\vec{c})$

2.0 Berechnen Sie den Vektor \vec{a} aus folgenden Vektorgleichungen.

2.1 $3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2.2 $2 \cdot \left(\vec{a} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \vec{a}$

2.3 $2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a} + \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie x so, dass die Vektoren $3\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{d}$ und $\begin{pmatrix} x \\ -5 \end{pmatrix}$ parallel sind.

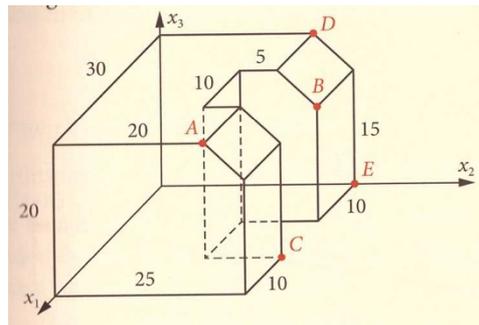
4 Berechnen Sie c_2 so, dass die Punkte A(-3/-4), B(4/2) und C(0; c_2) auf einer Geraden liegen.

5.0 Gegeben ist ein Viereck ABCD. Beweisen Sie, dass es ein Parallelogramm ist.

5.1 A(-1/-4), B(0/4), C(9/3) und D(8/-5)

5.2 A(2/0/0), B(1/-3/6), C(2/1/7) und D(3/4/1)

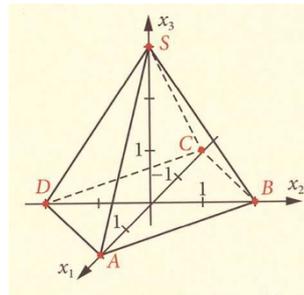
6.0 Gegeben ist die Skizze eines Gebäudes.



6.1 Berechnen Sie die Koordinaten der angegebenen Punkte C, D und E.

6.2 Berechnen Sie die Längen der Strecken \overline{AB} , \overline{CE} und \overline{AD} .

7.0 Theo möchte die Skizze einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche vergrößern.



7.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der fünf Eckpunkte und Berechnen Sie alle Kantenlängen.

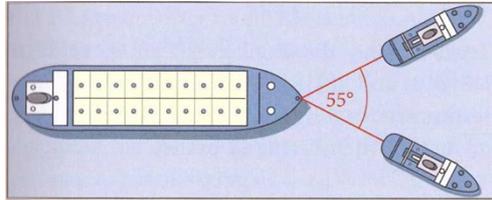
7.2 Vergrößern Sie die Pyramide im Verhältnis 2:1 und geben Sie die Koordinaten der neuen Eckpunkte an.

8.0 Bestimmen Sie die Länge der folgenden Vektoren.

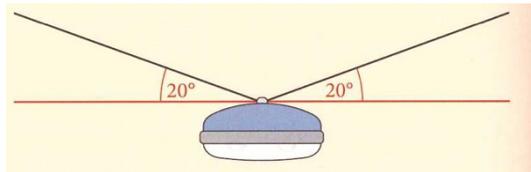
$$8.1 \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 8.2 \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad 8.3 \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

9 Berechnen Sie, wie a gewählt werden muss, damit $A(2/1/2)$ und $B(3/a/10)$ den Abstand 9 besitzen.

- 10 Ein Schiff wird von zwei Schleppern jeweils mit einer Kraft von 12kN in Seilrichtung gezogen. Die beiden Seile der Schlepper bilden einen Winkel von 55°. Bestimmen Sie zeichnerisch die resultierende Kraft.



- 11.0 Ein Flugzeug wird durch eine Schubkraft von 5,8 kN in konstanter Flughöhe geradlinig angetrieben. Der Wind übt dabei eine gleichbleibende Kraft von 4 kN in einem Winkel von 60° zur Flugrichtung aus.
- 11.1 Zeichnen Sie die Kräfte maßstabsgetreu in ein Koordinatensystem und legen Sie dazu das Flugzeug in den Koordinatenursprung.
- 11.2 Bestimmen Sie grafisch die Kraft, die insgesamt auf das Flugzeug wirkt und lesen Sie deren Größe und die Richtung zur Schubkraft ab.
- 11.3 Geben Sie einen Vektor für die Schubkraft und für die Windkraft an.
- 11.4 Berechnen Sie einen Vektor für die auf das Flugzeug wirkende Kraft sowie deren Größe.
- 11.5 Ermitteln Sie, unter welchem Winkel zur gewünschten Flugroute Kurs gehalten werden muss, damit das Flugzeug zum Zielort kommt.
- 12.0 Eine Straßenlampe ($|\vec{G}| = 300 \text{ N}$) ist an zwei Stellen befestigt (siehe Skizze).



- 12.1 Bestimmen Sie den Betrag und die Haltekraft in einem der Seile.
- 12.2 Untersuchen Sie, welchen Einfluss eine Verlängerung der Seile auf die Haltekraft hat, wenn man die Aufhängepunkte nicht verändert.

Lösungen

$$1.1 \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$1.2 \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1.3 \quad \frac{1}{2}\vec{a} + (\vec{b} - 2\vec{c}) = \begin{pmatrix} -6,5 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$2.1 \quad \vec{a} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2.2 \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$2.3 \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3 $x = 0$

$$4 \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ c_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Bedingung: $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{AB}$

$$\Rightarrow 3 = \lambda \cdot 7 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow c_2 + 4 = \lambda \cdot 6 \Rightarrow c_2 + 4 = \frac{18}{7} \Rightarrow c_2 = -\frac{10}{7}$$

$$5.1 \quad \vec{AB} = \vec{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad \vec{AD} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$5.2 \quad \vec{AB} = \vec{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \vec{AD} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.1 C(20/25/0), D(0/20/20), E(0/25/0)

6.2

$A(30/20/20), B(10/25/15)$

$$\overline{AB} = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{400 + 25 + 25} = \sqrt{450}$$

$$\overline{CE} = |\overline{CE}| = \left| \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{400} = 20$$

$$\overline{AD} = |\overline{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{900} = 30$$

7.1

$A(2/0/0), B(0/2/0), C(-2/0/0), D(0/-2/0), S(0/0/2)$

$$\overline{AB} = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \overline{DC}$$

$$\overline{AD} = |\overline{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \overline{BC}$$

$$\overline{AS} = |\overline{AS}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$$

7.2 $A(4/0/0), B(0/4/0), C(-4/0/0), D(0/-4/0), S(0/0/4)$

$$8.1 \quad |\vec{a}| = \sqrt{25 + 16 + 36} = \sqrt{77}$$

$$8.2 \quad |\vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

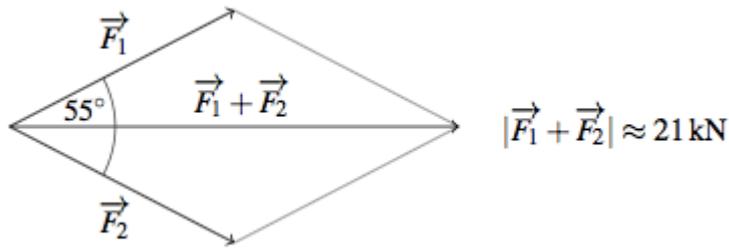
$$8.3 \quad |\vec{c}| = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$$

9

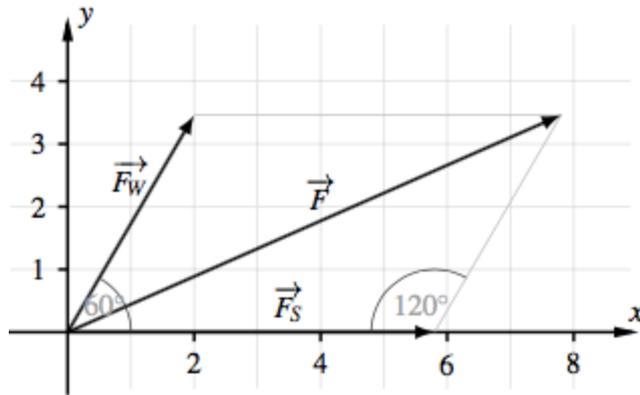
$$\overline{AB} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ a-1 \\ 8 \end{array} \right) \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1 + (a-1)^2 + 64} = \sqrt{a^2 - 2a + 66}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 2a + 66} = 9 \Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow a_1 = -3 \quad a_2 = 5$$

10



11.1



11.2 Die Kräfte wirken in einem Winkel von etwa 25° und die Größe der resultierenden Kraft beträgt etwa $8,5 \text{ kN}$ (aus der Zeichnung gemessen).

11.3

$$\vec{F}_s = \begin{pmatrix} 5,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

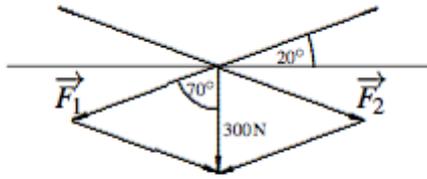
$$\vec{F}_w = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(60^\circ) \\ 4 \cdot \sin(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$$

11.4

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_w = \begin{pmatrix} 7,8 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix} \quad |\vec{F}| = \sqrt{(7,8)^2 + (\sqrt{12})^2} \approx 8,5346$$

$$11.5 \sin \alpha = \frac{|\vec{F}_w| \cdot \sin(120^\circ)}{|\vec{F}|} = \frac{4 \cdot \sin(120^\circ)}{8,5346} \approx 0,4059 \Rightarrow \alpha \approx 23,95^\circ$$

12.1



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{150}{\cos(70^\circ)} \approx 438,57$$

12.2 Wenn die Seile verlängert werden, dann wird der Winkel größer als 20° , die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke im Kräfteparallelogramm werden damit kleiner und damit auch die Schenkellängen, die den Spannkraften entsprechen.